

Ejercicio 1 del modelo 3 de la opción A de 1998.

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (3x - 2x^2)e^x$.

- (a) Estudia el crecimiento y el decrecimiento de f .
- (b) Calcula los máximos y los mínimos relativos de f .

Solución

(a)
El crecimiento y el decrecimiento de $f(x)$ se obtiene del estudio de su primera derivada

$$f(x) = (3x - 2x^2)e^x$$

$$f'(x) = (3 - 4x)e^x + (3x - 2x^2)e^x = f(x) = e^x \cdot (-2x^2 - x + 3)$$

$f'(x) = 0$, como la exponencial no es negativa son las soluciones de $2x^2 + x - 3 = 0$, y se obtiene $x = 1$ y $x = -3/2$.

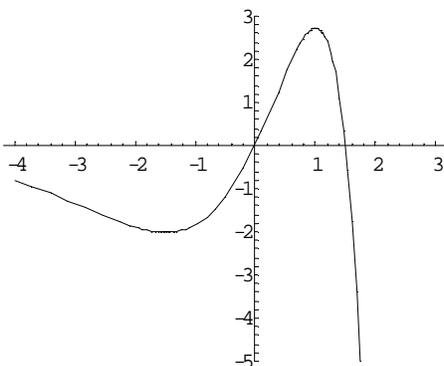
Como $f'(x) < 0$, si $x < -3/2$, $f(x)$ es decreciente en $x < -3/2$

Como $f'(x) > 0$, si $-3/2 < x < 1$, $f(x)$ es creciente en $-3/2 < x < 1$

Como $f'(x) < 0$, si $x > 1$, $f(x)$ es decreciente en $x > 1$

Por definición en $x = -3/2$ es un mínimo y en $x = 1$ hay un máximo., y sus valores son $f(-3/2) = -9 / \sqrt{e^3}$ y $f(1) = e$

La gráfica es (no se pide)

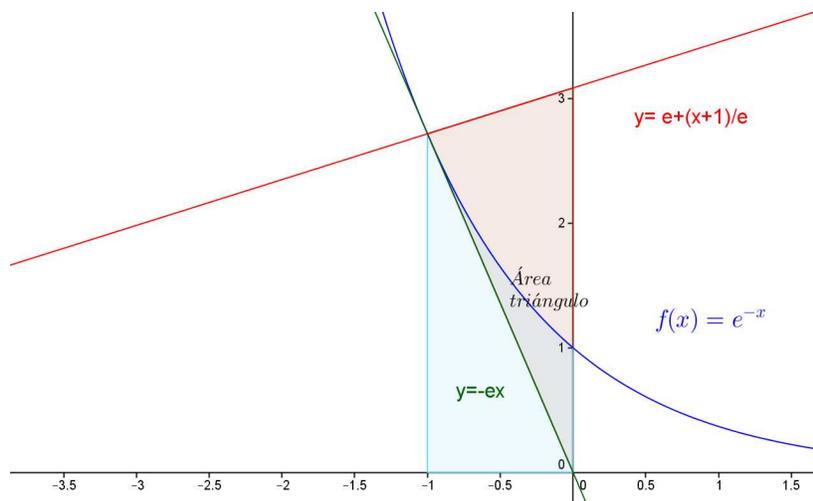


Ejercicio 2 del modelo 3 de la opción A de 1998.

- (a) Halla el área del triángulo formado por el eje OX y las rectas tangentes y normal a la curva de ecuación $y = e^{-x}$ en el punto de abscisa $x = -1$.
- (b) Halla el área de la región limitada por la curva de ecuación $y = e^{-x}$ y el eje OX para los valores $-1 \leq x \leq 0$.

Solución

(a)
La gráfica es



La función $f(x) = e^{-x}$ está en azul.

Su recta tangente en $x = -1$ es $y - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$

Como $f'(x) = -e^{-x}$, $f(-1) = e^1$ y $f'(-1) = -e^1$ la recta tangente es $y - e = -e \cdot (x + 1)$ (en verde)

Su recta normal en $x = -1$ es $y - f(-1) = [-1 / f'(-1)](x + 1)$, es decir $y - e = (1/e) \cdot (x + 1)$ (en granate)

El área del triángulo pedido es $\frac{1}{2}$ de la base por la altura. La base es la distancia del origen de coordenadas al punto de corte de la recta normal con el eje de abscisas, que se obtiene haciendo $y = 0$ en la ecuación de la recta normal, es decir $0 - e = (1/e) \cdot (x + 1)$. Despejando obtenemos $x = -(1 + e^2)$, luego la base del triángulo es $(1 + e^2)$.

La altura del triángulo es $f(-1) = e^{-(-1)} = e$, luego

Área del triángulo = $\frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} \cdot (1 + e^2) \cdot e$ u.a.

(b)

La otra área pedida es $\text{Area} = \int_{-1}^0 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_{-1}^0 = (-e^0) - (-e^1) = -1 + e$ u.a.

Ejercicio 3 del modelo 3 de la opción A de 1998.

Halla la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto (0, 2) y cuya directriz es la recta de ecuación $y = -2$.

Solución

La parábola es el lugar geométrico de los puntos $X(x,y)$ que equidistan de la directriz ($y = -2$) y del foco $F(0,2)$, es decir

$$d(X,F) = d(X,r)$$

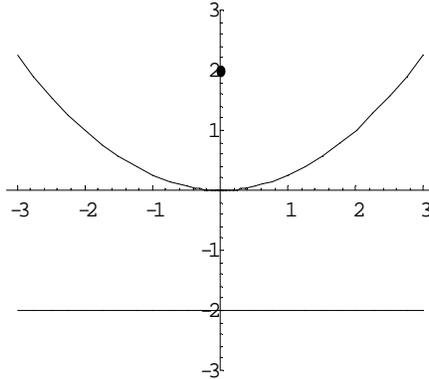
$$\mathbf{FX} = (x-0, y-2)$$

$$d(X,F) = [x^2 + (y-2)^2]^{(1/2)}$$

$$d(X,r) = \frac{|y+2|}{1} = d(X,F) = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

Elevando al cuadrado tenemos $(y+2)^2 = x^2 + (y-2)^2$. Operando y simplificando nos queda $x^2 = 4y$

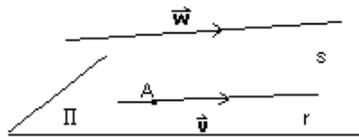
Su gráfica es



Ejercicio 4 del modelo 3 de la opción A de 1998.

Sean r y s las rectas dadas por : $r \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ $s \equiv \begin{cases} 3x+2y-3=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$. Determina la ecuación de un plano que contenga a r y sea paralelo a s .

Solución



Para el plano Π tomamos de la recta r un punto, el A y un vector director v , y de la recta s otro vector director w

Para el punto A tomamos $y = 1, x = 0$, sustituimos en la recta r y obtenemos $z = 1$, luego $A(0,1,1)$

$$v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, 3); \quad w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 7)$$

$$\text{Luego el plano } \Pi \text{ es: } \Pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} x & y-1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-x - y + 1) = 0. \text{ Simplificando } -x - y + 1 = 0.$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1 del modelo 3 de la opción B de 1998.

(a) Calcula los extremos relativos y absolutos de la función $f : [-7, 1] \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 6x^2 + 49$.

(b) Sea β el punto en el que f alcanza su máximo absoluto. Calcula $\int_{-7}^{\beta} f(x) dx$

Solución

(a)

Los extremos relativos de la función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 49$, pueden ser las soluciones de $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 + 12x; \quad f'(x) = 0, \text{ nos da } x = 0 \text{ y } x = -4$$

$$f''(x) = 6x + 12$$

Como $f''(0) = 12 > 0$, $x = 0$ es un mínimo

Como $f'(-4) = -12 < 0$, $x = -4$ es un máximo

(a)

El máximo absoluto es el mayor valor de la función en los extremos del intervalo o en los puntos que anulan la primera derivada. Sustituimos $f(x)$ en $-7, -4, 0$ y 1 .

$$f(-7) = 0$$

$$f(0) = 49$$

$$f(1) = 56$$

$$f(-4) = 81$$

resulta que el máximo absoluto se alcanza en $x = -4$, luego $\beta = -4$ y

$$\int_{-7}^{\beta} f(x) dx = \int_{-7}^{-4} (x^3 + 6x^2 + 49) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} + 49x \right]_{-7}^{-4} = (4^4/4 - 2 \cdot 4^3 - 49 \cdot 4) - (7^4/4 - 2 \cdot 7^3 - 49 \cdot 7) = 1443/4$$

Ejercicio 2 del modelo 3 de la opción B de 1998.

Sea $f: (-\pi, \pi)$ la función derivable que para $x \neq 0$ verifica $f(x) = [\ln(1+x^2)/\text{sen}(x)]$, siendo $\ln(t)$ el logaritmo neperiano de t .

(a) ¿Cuanto vale $f(0)$?

(b) ¿Cuanto vale $f'(0)$?

Solución

(a)

Supongo que $f(0)$ será el verdadero valor de la función en $x = 0$, es decir $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [\ln(1+x^2)/\text{sen}(x)] = (0/0)$, aplicamos la regla de L'Hôpital

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \{ [2x(1+x^2)] / \cos(x) \} = \lim_{x \rightarrow 0} [2x / (1+x^2) \cdot \cos(x)] = 0 / 1 \cdot 1 = 0 / 1 = 0.$$

(b)

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(0+h) - f(0)] / h = \lim_{h \rightarrow 0} [f(h) / h] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h^2)}{\text{sen}(h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h^2)}{h \cdot \text{sen}(h)} = \frac{0}{0}$$

le aplicamos la regla de L'Hôpital

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{1 \cdot \text{sen}(h) + h \cdot \cos(h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{(1+h^2)(\text{sen}(h) + h \cos(h))} = \frac{0}{0}$$

le aplicamos la regla de L'Hôpital

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{(2h)(\text{sen}(h) + h \cos(h)) + (1+h^2)(2 \cos(h) - h \text{sen}(h))} = 2 / (0 + 1 \cdot (1+1)) = 2/2 = 1$$

Ejercicio 3 del modelo 3 de la opción B de 1998.

Cuatro puntos A, B, C y D tienen las siguientes coordenadas: $A=(1, 2, 3)$, $B=(0, 1, -2)$, $C=(3, 1, 0)$ y $D=(m, -1, 4)$.

(a) ¿Existe algún valor de m para el que los cuatro puntos están sobre una línea recta? En caso afirmativo, determina dicha recta; en caso negativo, di porqué no están alineados..

(b) ¿Existe algún valor de m para el que los cuatro puntos están sobre un plano? En caso afirmativo, determina dicho plano; en caso negativo, di porqué no son coplanarios.

(c) Para $m = 2$, ¿determinan estos cuatro puntos un tetraedro? En caso afirmativo, calcula el volumen de dicho tetraedro; en caso negativo, di porqué no lo determinan.

Solución

(a)



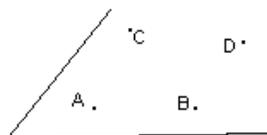
Si los cuatro puntos están alineados los vectores **AB**, **AC** y **AD** son dependientes y $\det(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD}) = 0$

$$\mathbf{AB} = (-1, -1, -5); \quad \mathbf{AC} = (2, -1, -3); \quad \mathbf{AD} = (m-1, -3, 1)$$

$$\det(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 \\ m-1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -1(-1-9) + 1(-1+5m-5) - 5(-6+m-1) = 39 \neq 0, \text{ luego los cuatro puntos no están en una}$$

recta.

(b)



Con los puntos A, B y C formo un plano Π tomando como punto A y como vectores paralelos \mathbf{AB} y \mathbf{AC} . Después fuerzo a que el punto D pertenezca al plano

$$A = (1, 2, 3), \mathbf{AB} = (-1, -1, -5), \mathbf{AC} = (2, -1, -3)$$

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (x-1)(3-5) - (y-2)(3+10) + (z-3)(1+2) = -2x - 10y + 3z + 13 = 0$$

Como $D \in \Pi$, $-2(m) + 10 + 12 + 13 = 0$, de donde $m = 35/2$ para que $D \in \Pi$,

(c)

Hemos visto en el apartado (b) que para $m = 35/2$ $D \in \Pi$, y no puede formarse un tetraedro, luego si $m = 2$, $D \notin \Pi$, y los cuatro puntos forman un tetraedro.

Sabemos que su volumen es $V = 1/6 |[\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD}]|$

$$\mathbf{AB} = (-1, -1, -5), \mathbf{AC} = (2, -1, -3), \mathbf{AD} = (m-1, -3, 1) = (1, -3, 1)$$

$$V = 1/6 |[\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD}]| =$$

$$= 1/6 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1/6 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & -5 \\ 0 & -3 & -7 \\ 0 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 1/6 |(-1)(-16)| = 16/6 = 8/3 \text{ u.v.}$$

Ejercicio 4 del modelo 3 de la opción B de 1998.

Considera el sistema de ecuaciones lineales;

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 3, \\ x - y + z &= 8, \\ 3x - y + mz &= -2m. \end{aligned}$$

(a) Determina si existe y, en ese caso, calcula el valor del parámetro m para el cual los tres planos determinados por las ecuaciones del sistema se cortan en una línea recta.

(b) Halla la ecuación del plano que contienen a la recta determinada en el apartado anterior y pasa por el punto $(2, 1, 3)$.

Solución

(a)

$$\text{Para que se corten en una recta } \text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*), \text{ con } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & m \end{pmatrix}, \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & m & -2m \end{pmatrix}$$

Para que $\text{rango}(A) = 2$, $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = 1(-m+1) = 0, \text{ de donde } m = 1.$$

Para que $\text{rango}(A^*) = 2$, el siguiente menor tiene que ser cero.

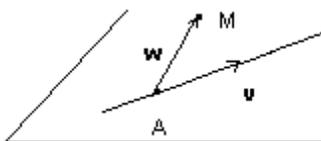
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 8 \\ 3 & -1 & -2m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -2m-3 \end{vmatrix} = 1(2m+3-5) = (2m-2) = 0, \text{ de donde } m = 1.$$

Como ambos valores coinciden para $m = 1$, los tres planos se cortan en una recta, que es

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 3, \\ x - y + z &= 8, \end{aligned}$$

pues lo único que hemos hecho ha sido suprimir la tercera ecuación.

(b)



Para formar el plano de la recta tomamos un punto A y un vector director, y el otro vector paralelo del plano será \mathbf{AM} , con $M(2, 1, 3)$.

Para el punto A tomo $z = 1$, con lo cual me queda

$$\begin{aligned} 2x - y &= 2, \\ x - y &= 7, \end{aligned}$$

resolviendo este sistema obtengo $x = -5$ e $y = -12$, es decir $A(-5, -12, 1)$

$$v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-1+1) - \mathbf{j}(2-1) + \mathbf{k}(-2+1) = (0, -1, -1)$$

$$\mathbf{AM} = (7, 13, 2)$$

$$\text{Luego el plano pedido es } \Pi \equiv \begin{vmatrix} x+5 & y+12 & z-1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 7 & 13 & 2 \end{vmatrix} = (x+5)(-2+13) - (y+12)(7) + (z-1)(7) = 11x - 7y + 7z - 36 = 0$$